

25	25	25	25	100

BA3 EN SCIENCES MATHÉMATIQUES
MATH-F-319 MATHÉMATIQUE COMBINATOIRE
EXAMEN DU 12 JANVIER 2011 (PARTIE AVEC DOCUMENTS)
NOM : **Prénom :**

Veillez à soigneusement justifier vos réponses !

1. **(25 points)** Travaillons dans $A(\mathbb{R}^d)$ en fixant un convexe K non vide et distinct de $A(\mathbb{R}^d)$.
 - a) Parmi tous les convexes C qui sont disjoints de K , en existe-t-il nécessairement un maximal ?
 - b) Si K est ouvert, un convexe maximal disjoint de K est-il nécessairement fermé ?

2. **(25 points)** Soit $C_4(7)$ le polytope cyclique de dimension 4 ayant 7 sommets $v_1 = \gamma(t_1)$, $v_2 = \gamma(t_2)$, \dots , $v_7 = \gamma(t_7)$ avec $t_1 < t_2 < \dots < t_7$.
 - a) Quel est le nombre total d'arêtes de $C_4(7)$?
 - b) Quel est le nombre de facettes de $C_4(7)$ contenant les sommets v_1 et v_2 ?
 - c) Quel est le nombre de faces de $C_4(7)$ de dimension 2 contenant les sommets v_1 et v_2 ?
 - d) Quel est le nombre total de faces de $C_4(7)$ contenant les sommets v_1 et v_2 ?

3. **(25 points)** Pour deux polytopes pleins P et P' de $A(\mathbb{R}^d)$, notons respectivement m et n les nombres de sommets et de facettes de P , et pareillement m' et n' les nombres de sommets et de facettes de P' . Dans la suite, nous fixons les valeurs de soit d, m et m' , soit d, n et n' (mais jamais P ou P').
 - a) Quel est, en fonction de d, m et m' , le plus grand nombre possible de sommets d'un polytope de la forme $\text{conv}(P \cup P')$?
 - b) Quel est, en fonction de d, n et n' , le plus grand nombre possible de facettes d'un polytope de la forme $P \cap P'$?

4. **(25 points)** Pour des matrices $c \in \mathbb{R}^{d \times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ fixées, l'égalité suivante est-elle toujours vraie ?

$$\max\{c^t x \mid x \in \mathbb{R}^{d \times 1} \text{ avec } Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{y^t b \mid y \in \mathbb{R}^{m \times 1} \text{ avec } y^t A \geq c^t, y \geq 0\}$$

(ici, nous notons M^t la transposée de la matrice M).