

25	25	25	25	100

BA3 EN SCIENCES MATHÉMATIQUES
MATH-F-319 MATHÉMATIQUE COMBINATOIRE
EXAMEN D'AOUT 2011 (PARTIE AVEC DOCUMENTS)
NOM : **Prénom :**

Veillez à soigneusement justifier vos réponses !

1. (25 points) Pour

$$G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } y = \operatorname{tg} x \}$$

- a) décrivez précisément l'enveloppe convexe C de G ;
- b) cette enveloppe convexe C est-elle ouverte ? est-elle fermée ?
- c) C est-elle un cône convexe ?

2. (25 points) Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel réel V vers un espace vectoriel réel W .

- a) L'image par f d'un cône convexe C de V est-elle un cône convexe de W ?
- b) L'image réciproque par f d'un cône convexe D de W est-elle un cône convexe de V ?
- c) Mêmes questions si f est plus généralement une application affine.

3. (25 points) Dans $A(\mathbb{R}^d)$ avec $d \geq 2$ soit P un polytope plein ayant n sommets et H un hyperplan contenant un point intérieur de P mais aucun sommet de P .

- a) Si $d = 2$, quel est le nombre de sommets du polytope $P \cap H$?
- b) Pour d naturel quelconque, montrer que le polytope $P \cap H$ possède au plus $\binom{n}{2}$ sommets.
- c) Mieux, montrer que le polytope $P \cap H$ possède au plus $\lfloor n^2/4 \rfloor$ sommets.

4. (25 points) Voici un système de trois inégalités linéaires en trois variables. Duquel des deux cas du Théorème de l'alternative relève ce système ? Justifiez votre réponse en donnant aussi un certificat.

$$\begin{cases} x - y + 5z \leq 1 \\ 2x + y - z \leq -2 \\ -x - y + 3z \leq -3 \end{cases}$$